Musterlösung 9

1. a) Die Verteilung von (X,Y) ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
P[X=0,Y=0] &= p,\\
P[X=0,Y=1] &= P[X=0]-P[X=0,Y=0]=1/2-p,\\
P[X=1,Y=0] &= P[Y=0]-P[X=0,Y=0]=1/3-p,\\
P[X=1,Y=1] &= 1-P[X=0,Y=0]-P[X=0,Y=1]-P[X=1,Y=0]\\
&= 1/6+p.
\end{aligned}
$$

Da die obigen Ausdrücke Wahrscheinlichkeiten sind, müssen ihre Wert zwischen 0 und 1 liegen. Folglich darf p nur Werte zwischen 0 und 1/3 annehmen. Andererseits, falls $p\in[0,1/3]$, dann sind $\sum_\omega P[\{\omega\}]=1$ und $P[\{\omega\}]\geq 0$ für alle $\omega\in\Omega$ erfüllt.
Die Zufallsvariablen X und Y sind genau dann unabhängig, wenn für alle $i,j=0,1$

$$P[X=i,Y=j]=P[X=i]\cdot P[Y=j]$$

erfüllt ist. Also genau dann, wenn $p=1/6$ ist.

b)

$$
\begin{aligned}
E[X] &= 0\cdot P[X=0]+1\cdot P[X=1]=1-1/2=1/2,\\
E[Y] &= 0\cdot P[Y=0]+1\cdot P[Y=1]=1-1/3=2/3,\\
E[XY] &= 0\cdot P[XY=0]+1\cdot P[XY=1]=P[X=1,Y=1]=1/6+p.
\end{aligned}
$$

Da X und Y nur die Werte 0 oder 1 annehmen, gilt $X^2=X$ und $Y^2=Y$. Somit hat man

$$
\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= E[X^2]-E[X]^2=1/4,\\
\sigma_Y^2 &= E[Y^2]-E[Y]^2=2/9.
\end{aligned}
$$

$E[XY]=E[X]\cdot E[Y]$ gilt hier genau dann, wenn $p=1/6$ erfüllt ist (also genau dann, wenn X und Y unabhängig sind).

c) Ein einfaches Beispiel ist das Folgende: Sei U eine diskrete Zufallsvariable, welche die Werte $-1,0,1$ je mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ annimmt. Setze dann $V:=U^2$. Intuitiv sind U und V nicht unabhängig. Formal sieht man, dass

$$P[U=1,V=1]=P[U=1,U^2=1]=P[U=1]=\frac{1}{3}\neq P[U=1]P[V=1].$$

Also sind U und V effektiv nicht unabhängig. Wie man leicht zeigt, gilt jedoch $E[UV]=E[U]E[V]$, denn offenbar ist $E[U^3]=E[U]$ und $E[U]=0$.

Bitte wenden!

2. **a)** Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$. Für $y = 1$ erhalten wir

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k &= (1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n \\
&= \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \right) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \binom{m}{k} \binom{n}{j} x^{k+j} \\
&= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{m}{k-j} \binom{n}{j} \right) x^k = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{k-j} \binom{n}{j} \right) x^k,
\end{aligned}$$

wobei wir für $j > n$, $\binom{n}{j} = 0$ setzen. Einen Koeffizientenvergleich liefert die Gleichung $\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{k-j} \binom{n}{j} = \binom{m+n}{k}$.

BEMERKUNG: Die Gleichung wird Identität von Vandermonde genannt. Man kann die Gleichung auch kombinatorisch zeigen: wir betrachten $m+n$ Objekte und unterteilen sie in zwei Gruppen der Grössen m und n. Für $k \geq 1$ gibt es $\binom{m+n}{k}$ Möglichkeiten, k Objekte aus den $m+n$ Objekten zu wählen. Von den k Objekten sind j davon aus der Gruppe mit n Objekten und $k-j$ davon aus der Gruppe mit m Objekten. Die Anzahl Möglichkeiten k Objekte auf diese Weise aus den beiden Gruppen zu wählen, beträgt $\binom{m}{k-j} \binom{n}{j}$. Summieren wir über alle möglichen Werte von j, erhalten wir die gewünschte Identität.

b) Weil die Mengen $\{Y = j\}$ für $j \in \mathbb{N}$ disjunkt sind, gilt für $k \leq m+n$,

$$\begin{aligned}
P(X+Y=k) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(X+Y=k, Y=j) \\
&\overset{\substack{\{Y+X=k, Y=j\}=\emptyset \\ \text{für } j>k}}{=} \sum_{j=0}^{k} P(X=k-j, Y=j) \\
&\overset{\text{Unabh.}}{=} \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{m-k+j} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{k-j} \binom{n}{j} p^k (1-p)^{m+n-k} \\
&\overset{\text{a)}}{=} \binom{m+n}{k} p^k (1-p)^{m+n-k}.
\end{aligned}$$

Also is $X+Y$ wieder binomial verteilt mit Parameter $(m+n, p)$.

Siehe nächstes Blatt!

BEMERKUNG: Intuitiv folgt das Resultat aus folgender Überlegung: wir schreiben X als Summe $X = X_1 + \ldots + X_m$, wobei die Summanden X_i unabhängig Bernoulli verteilt sind mit Parameter p. Ebenso schreiben wir Y als Summe $Y = Y_1 + \ldots + Y_n$, wobei die Summanden Y_i ebenfalls unabhängig Bernoulli verteilt sind mit Parameter p. Weil X und Y unabhängig sind, sind auch die Summanden X_i und Y_j alle unabhängig. Daher ist $X + Y = X_1 + \ldots + X_m + Y_1 + \ldots + Y_n$ wieder binomial verteilt mit Parametern $(m + n, p)$.

c) Man sieht leicht, dass X' und Y' beide binomial verteilt sind mit Parametern $(n, 1/2)$. Natürlich gilt auch $X' + Y' = n$. Also ist $X' + Y'$ konstant und hat die Verteilung

$$P[X' + Y' = k] = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies widerspricht dem Resultat aus **b) nicht**, da X' und Y' nicht unabhängig sind.

3. a) Für $k \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} P[X + Y = k] &= \sum_{j=0}^{k} P[X = k - j,\, Y = j] \overset{\text{Unabh.}}{=} \sum_{j=0}^{k} P[X = k - j] P[Y = j] \\ &= \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-j}}{(k-j)!}\, e^{-\mu} \frac{\mu^j}{j!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} \mu^j \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!}, \end{aligned}$$

d.h. $X + Y$ ist Poisson verteilt mit Parameter $\lambda + \mu$. Analog findet man, dass $X + Z$ Poisson verteilt ist mit Parameter $\lambda + 2\mu$.
BEMERKUNG: Allgemein gilt für zwei unabhängige Poisson verteilte Zufallsvariablen X und Y mit respektiven Parametern λ und μ, dass $X + Y$ wieder Poisson verteilt ist mit Parameter $\lambda + \mu$.

b) Definiere das Ereignis $D = \{\text{Chip enthält Komponente } B\}$. Dann gilt mit dem Satz von Bayes

$$\begin{aligned} P[D|N = n] &= \frac{P[N = n|D]\, P[D]}{P[N = n|D]\, P[D] + P[N = n|D^c]\, P[D^c]} \\ &= \frac{P[X + Y = n] \cdot \frac{1}{2}}{P[X + Y = n] \cdot \frac{1}{2} + P[X + Z = n] \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-\mu} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\right)^n}. \end{aligned}$$

c) Es gilt $N = (X + Y)1_D + (X + Z)1_{D^c}$ und wegen der Unabhängigkeit von $X + Y$ und D (sowie von $X + Z$ und D) erhalten wir

$$\begin{aligned} E[N] &= E[X + Y] P[D] + E[X + Z] P[D^c] \\ &= E[X + Y] \cdot \tfrac{1}{2} + E[X + Z] \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} (\lambda + \mu + \lambda + 2\mu) = \lambda + \tfrac{3}{2} \mu. \end{aligned}$$